יש לרשום פתרון מלא ומנומק לשתי השאלות הבאות.

1. (25 נקודות)

(א) נתון השדה הוקטורי

$$\overline{F}(x,y,z) = 3x^2y\hat{i} + (x^3+2y-z^2)\hat{j} - 6xyz\hat{k}$$

והמשטח

$$S = \{(x,y,z)|\ z = 4-x^2-y^2,\ z \geq 2\}$$

עם אוריינטציה עבורה לנורמל רכיב z שלילי. חשבו את

$$\iint\limits_S \overline{F}\cdot\hat{n}dS$$

פתרון: נסגור את המשטח בעזרת המשטח $S_1 = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2 \leq 2,\ z=2\}$ וניתן לו את האוריינטציה בה רכיב z שלילי. אז $(-S)\cup S_1$ היא שפה של הגוף $V = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2 \leq 2,\ 2 \leq z \leq 4-x^2-y^2\}$ עם האוריינטציה החיובית. השדה גזיר ברציפות כי הרכיבים שלו הם פולינומים, ולכן לפי משפט גאוס

$$\iint\limits_{(-S)\cup S_1} \overline{F}\cdot\hat{n}dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}(\overline{F})dxdydz = \iiint\limits_V 2dxdydz =$$

$$= 2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2}\left(\int\limits_2^{4-x^2-y^2} dz\right)dxdy = 2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} 2-x^2-y^2dxdy =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r(2-r^2)drd\theta = 4\pi\left(r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} = 4\pi\,(2-1) = 4\pi$$

פרמטריזציה של S_1 היא $\overline{r}(x,y) = (x,y,2),\ x^2+y^2 \leq 2$, אבל הנורמל $\overline{r}'_x \times \overline{r}'_y = (0,0,1)$ אינו תואם, ולכן

$$\iint\limits_{S_1} \overline{F}\cdot\hat{n}dS = -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2}(2x^2y, x^3+2y-4, -12xy)\cdot(0,0,1)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} 12xydxdy = 0$$

ולכן $\iint\limits_S \overline{F}\cdot\hat{n}dS = -4\pi$.

(ב) נתון השדה הוקטורי

$$\overline{F}(x,y,z) = yz(2x+y+z)\hat{i} + xz(x+2y+z)\hat{j} + xy(x+y+2z)\hat{k}$$

והעקום $L = \{(x,y,z)|x^2+y^2=1,\ z=x\}$. חשבו את האינטגרל $\oint\limits_L \overline{F}\cdot d\overline{r}$ כאשר האוריינטציה של L היא נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מלמעלה.

פתרון: השדה הוא גזיר ברציפות כי הרכיבים הם פולינומים, וחישוב מראה כי $\overline{\nabla}\times\overline{F} = \overline{0}$. נגדיר משטח $S = \{(x,y,x)|\ x^2+y^2 \leq 1\}$. אז L היא שפת המשטח. נבחר אוריינטציה של המשטח כך שהאוריינציות תואמות, וזה קורה כאשר לנורמל של S יש רכיב z חיובי. אז, לפי סטוקס

$$\oint\limits_L \overline{F}\cdot d\overline{r} = \iint\limits_S \overline{\nabla}\times\overline{F}\cdot\hat{n}dS = \iint\limits_S 0dS = 0.$$

2. (25 נקודות)

(א) נתונה הפונקציה

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

מיצאו ומיינו את הנקודות הקריטיות של הפונקציה f.

פתרון: הפונקציה גזירה ברציפות כי היא פולינום ולכן הנקודות הקריטיות הן פתרון של $f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 0 \quad f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0$ שנותן את הנקודות $(0,0),\ (1,1)$.

כיוון שהפונקציה גזירה פעמיים ברציפות, כי היא פולינום, אז נשתמש בהסיאן, שיוצא $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.

עבור הנקודה $(0,0)$ אנו מקבלים $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ וכיוון ש־ $\det H_f(0,0) = -9 < 0$ אז זוהי נקודת אוכף.

עבור הנקודה $(1,1)$ אנו מקבלים $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ וכיוון ש־ $f''_{xx}(0,0) = 6 > 0,\ \det H_f(1,1) = 27 > 0$ אז זוהי נקודת מינימום מקומי.

(ב) נתונה ההיפרבולה

$$(x-2y)^2 - 3y^2 = 36.$$

נתון (כלומר לא צריך להוכיח) כי להיפרבולה יש נקודה שהכי קרובה לראשית ונתון כי אין נקודה הכי רחוקה מהראשית.

מיצאו את הנקודות על ההיפרבולה שהכי קרובות לראשית, ואת המרחק שלהן מהראשית.

פתרון: אנו מחפשים את המינימום של הפונקציה $\sqrt{x^2+y^2}$ תחת האילוץ $(x-2y)^2 - 3y^2 = 36$. בשביל למצוא את הנקודות מספיק להסתכל על המינימום של $f(x,y) = x^2 + y^2$ תחת אותו האילוץ. נגדיר $g(x,y) = (x-2y)^2 - 3y^2 - 36$. אזי $f(x,y), g(x,y)$ גזירות ברציפות כיוון ששתיהן פולינומים. בנוסף, $\overline{\nabla} g(x,y) = \big(2(x-2y), -4(x-2y) - 6y\big)$ והוא מתאפס רק בנקודה $(0,0)$ שאינה על ההיפרבולה, כלומר אינה מקיימת את האילוץ. לכן נשתמש בכופלי לגרנג'.

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda(x-2y) &= 0 \\ 2y - 4\lambda(x-2y) - 6\lambda y &= 0 \end{aligned}$$

שנותן

$$\begin{aligned} (2+2\lambda)x - 4\lambda y &= 0 \\ -4\lambda x + (2+2\lambda)y &= 0 \end{aligned}$$

הדטרמיננט של המערכת הלינארית הומוגנית זו הוא $(2+2\lambda)^2 - 16\lambda^2 = -4(3\lambda^2 - 2\lambda - 1)$ שמתאפסת עבור $\lambda = 1, -\frac{1}{3}$.

עבור $\lambda = 1$ אנו מקבלים

$$\begin{aligned} 4x - 4y &= 0 \\ -4x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

שנותן $x = y$ והצבה לאילוץ נותנת $36 = (x-2x)^2 - 3x^2 = -2x^2$ ואין פתרון.

עבור $\lambda = -\frac{1}{3}$ אנו מקבלים

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}y &= 0 \\ \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}y &= 0 \end{aligned}$$

ולכן $y=-x$ והצבה לתוך האילוץ נותנת $36=(x+2x)^2-3(-x)^2=6x^2$ שנותן $x=\pm\sqrt{6}$ ולכן נקבל את הנקודות $(-\sqrt{6},\sqrt{6}),\ (\sqrt{6},-\sqrt{6})$.

לבסוף, אם $\lambda\neq 1,-\frac{1}{3}$ אז למערכת ההומגנית יש פתרון יחיד שהוא $x=y=0$ שאינו מקיים את האילוץ.

המרחק המתקבל הינו $\left((-\sqrt{6})^2+(\sqrt{6})^2\right)^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}=\sqrt{12}=\left((\sqrt{6})^2+(-\sqrt{6})^2\right)^{\frac{1}{2}}$